EPITA

Mathématiques

Examen S1B2-SR

Suites réelles

durée : 1 heure 30

Janvier 2026

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par règle de 3

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : une suite récurrente (8 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{1+4u_n}$.

On admet que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. La suite (u_n) est donc bien définie (son dénominateur ne s'annule pas).

1. Donner la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

2. En supposant que la suite (u_n) converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ? Justifier.

3. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. En déduire, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

5. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

6. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.

Exercice 2 : étude de suites 1 (5,5 points)

Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

[suite des pointillés page suivante]

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 3 : étude de suite 2 (3 points)

Soit la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}$.

1. En encadrant chaque terme de la somme, trouver un encadrement de u_n en fonction de n.

2. Quel est le comportement de cette suite en $+\infty$? Justifier.

Exercice 4 : comparaison de suites (6,5 points)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ne s'annulant pas. Rappeler la définition de : $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ en $+\infty$.

2. Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$ ou $= o(\cdot)$. Vous justifierez proprement.

   (a) $u_n = -n^3 - 2n + 3$ et $v_n = -n^2 + 6n$.

(b) $u_n = \ln(n) + e^n$ et $v_n = e^n + n^{10}$.

3. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $u_n = 4^n - n + 2$. Justifiez votre réponse.

Exercice 5 : cours (7 points)

1. Soient (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition (avec les quantificateurs) de « (u_n) converge vers ℓ ».

2. Énoncer avec soin le théorème des gendarmes.

3. Démontrer ce théorème en structurant avec les règles de démonstrations.

4. Application : étudier la limite de (u_n) où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos(e^n)}{n+1}$.